ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 1er OCTOBRE 1934.

PRÉSIDENCE DE M. Louis MANGIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. **Émile Picard**, en présentant une édition nouvelle du *Discours de la méthode* de Descartes, s'exprime comme il suit :

Le groupe des anciens élèves bibliophiles de l'École Centrale a voulu rendre hommage à Descartes, en faisant paraître le *Discours de la méthode* dans les éditions de grand luxe qu'ils ont commencé à publier. C'est cette édition, entièrement imprimée sur pur lin fabriqué à la main, au filigrane de ce groupe de bibliophiles, que je dépose sur le bureau. En écrivant une préface à ce volume, je n'ai eu d'autre but que de faciliter peut-être à plusieurs la lecture du *Discours*, et de présenter quelques remarques sur l'œuvre scientifique de Descartes.

Le *Discours de la méthode* contient en ses traits essentiels toute la philosophie cartésienne. On y trouve tout à la fois le métaphysicien que seule la véracité divine assure de l'existence d'une matière répondant à nos sensations, et le savant qui souhaite pour la science « de nous rendre comme maîtres et possesseurs de la nature ». Descartes, en même temps qu'il a été le théoricien voulant tout déduire de quelques principes de sa philosophie, a insisté sur la nécessité de l'expérience dans la connaissance de la nature, « expériences, dit-il, d'autant plus nécessaires qu'on est plus avancé en connaissance ». Il faut juger Descartes savant sur l'orientation toute nouvelle donnée à la science par ses intuitions géniales et par une méthode dont il a, avec *la Géométrie*, *la Dioptrique* et *les Météores*, montré la fécondité.

M. J.-B. Charcot s'exprime en ces termes :

La campagne du *Pourquoi-Pas?* en 1934 fut rendue particulièrement dure et difficile par un temps toujours défavorable, de très gros coups de vent, de la brume fréquente et de très mauvaises conditions des glaces. Ces difficultés furent surmontées et les deux principaux buts atteints, grâce aux qualités du navire, à l'entrain, au bon esprit et à l'endurance de l'équipage dirigé par de parfaits officiers mariniers sous les ordres de l'excellent officier des équipages de première classe A. Chatton, commandant le *Pourquoi-Pas ?* Tous ont fait, malgré d'extrêmes fatigues, plus que leur devoir.

L'état-major civil se composait de MM. P. Drach et J. Monod, naturalistes, de M. P. Idrac, physicien (ce dernier atteint de rhumatisme dut être hospitalisé à Thorsavn) et de MM. P. E. Victor, Gessen, Perez et Mater qui, chargés de mission par le Ministère de l'Éducation nationale, devaient, avec d'autres travaux secondaires, se livrer à des recherches ethnographiques sur les Esquimaux de Scoresby-Sund et les continuer sur ceux de la région d'Angmagsalik où nous devions les transporter et les installer pour une année.

A Tobermory, nous embarquâmes le Docteur Wager, géologue anglais ayant participé à l'ascension de l'Everest et aux expéditions de Watkins au Groenland, qui désirait étudier certains détails de la côte et préparer une base pour une nouvelle expédition; à Akureyré, M. Ebbe Münk, explorateur danois, nous rejoignit également et je ne crus pas possible de refuser à la femme d'un fonctionnaire de Scoresby-Sund le passage qu'elle ne pouvait trouver par ailleurs, lui permettant de rejoindre son mari dont elle était séparée depuis un an, à la suite de la mort dramatique de son enfant. MM. Wager et Münk, reconnaissant, après notre première tentative, que les conditions des glaces ne leur permettraient pas d'accomplir leurs missions, nous quittèrent à regret, lors de notre retour à Akureyré.

La traversée de Saint-Servan à Stornoway s'effectua normalement, mais à partir de cette escale, nous n'eûmes plus que des vents contraires, de la brume et du mauvais temps. A Thorsavn nous embarquâmes du matériel pour la mission ethnographique venant compléter celui pris en France. Nous mouillâmes dans la brume près du paquebot allemand *Monterosa* en croisière touristique avec 1300 passagers à bord. Il appareilla peu de temps après, et dix minutes plus tard s'échouait en situation

dangereuse vers le cap Glivursnaes. Nous lui offrîmes immédiatement nos services. La faible machine du *Pourquoi-Pas?* ne permit pas de contribuer au déséchouage, qui fut effectué après deux jours d'efforts, grâce à un puissant navire baliseur danois; une demi-heure plus tard s'éleva un coup de vent de Sud soulevant une grosse houle qui eût déterminé la perte du *Monterosa*. Nous pûmes toutefois lui fournir un exemplaire des cartes de courant des Feroë (S. H. 8 N.) qu'il ignorait et qui, dans la suite, pouvait lui éviter semblable accident. Capitaine et état-major allemands ne nous ménagèrent pas l'expression de leurs sentiments de reconnaissance.

En route pour Akureyré un très violent coup de vent nous obligea à relâcher à Seydisfiord, puis à nous abriter pendant quelques heures sous Langanaes.

Dans mon rapport de 1933 et dans une Communication faite à l'Académie de Marine (13, 1934), j'ai combattu les assertions tendant à faire considérer le Scoresby-Sund comme toujours facile à atteindre et devenant de ce fait un lieu ouvert au tourisme; j'ai même écrit la phrase suivante, dictée par mon expérience personnelle et ma documentation : « il se peut fort bien que la porte entr'ouverte dans la banquise en 1932, puis largement ouverte en 1933 se referme en 1934... ». Cette prédiction s'est malheureusement confirmée. Non seulement le Scoresby-Sund fut des plus difficiles à atteindre, mais la côte Est fut complètement bloquée jusqu'à la région d'Angmagssalik. Lauge Kock, parti sur le *Gustav-Holm* une quinzaine de jours avant nous, mit neuf jours à traverser les glaces jusqu'au Scoresby-Sund et il ne put pénétrer dans la baie de Rosenvinge; le *Njall*, petit navire islandais affrété par des explorateurs alpinistes italiens, mit environ trois semaines et se fit de graves avaries; le *Gertrud-Rask*, ravitailleur des colonies groenlandaises, que nous précédâmes et qui profita, ainsi que le *Njall*, des renseignements que nous pûmes lui transmettre, en prit six et nous-mêmes sept. Ces navires finirent par se dégager, mais tous, *Gustav-Holm* et *Njall* surtout, durent envisager l'éventualité d'un hivernage et s'y préparer.

Nous rencontrâmes les glaces à environ 30 milles du cap Tobin le 6 août, et y pénétrâmes, mais une avarie du patin de glissière de la B. P. nous décida, étant donné l'état constaté de la banquise, à revenir à Akureyré où la réparation fut rapidement effectuée. Le 13 août, nous rentrions de nouveau dans les glaces et, après avoir traversé la ceinture, nous nous sommes heurtés à des blocs de plusieurs milles d'étendue s'appuyant sur le cap Hope et comprimant dans leur marche lente un pack épais et serré; non sans peine nous avons pu nous dégager de cette zone dangereuse, mais

pour retomber dans la banquise de ceinture dans laquelle, emprisonnés, nous avons dérivé jusqu'au sud du cap Brewster. Profitant d'un relâchement momentané, nous avons foré notre route, sommes revenus sur nos pas, et nous sommes dirigés vers le cap Tobin à travers des glaces d'abord lâches, puis de nouveau très serrées; sauf de très fugitives éclaircies, tous ces trajets, qui ont pris six jours, se sont accomplis dans la brume. Quand celle-ci s'est levée, nous nous trouvions à quelques milles du cap Swainson. Enfin, le septième jour, forant de nouveau notre route, nous mouillâmes devant la station de Rosenvinge.

En communication par T. S. F. avec le *Gertrud-Rask* qui se trouvait dans les mêmes déplorables conditions, nous avons pu le renseigner sur la meilleure route à suivre, et le guider dans la brume par notre sifflet. Dans la suite, ce navire nous rendit des services du même ordre. Le *Njall*, qui n'avait pu atteindre son but sur la côte Est, suivit le ravitailleur danois.

A la station de Scoresby-Sund, nous conformant à nos instructions, nous avons embarqué tout le matériel laissé par l'*Année Polaire*; pendant cette opération, la mission ethnographique, ainsi que MM. Drach et Monod ont mené à bien leurs recherches et observations. Le *Njall*, dont le gouvernail avait été brisé et l'hélice endommagée, a été échoué; nous avons démonté, refait en grande partie et remonté son gouvernail. Nous avons offert l'hospitalité à bord au comte Bouzi et à ses camarades, qui l'ont acceptée avec une cordiale reconnaissance et leur avons fourni des indications pour la suite de leur expédition. Pendant notre séjour à Rosenvinge le temps a été généralement mauvais avec glaces abondantes, pluie et brume.

La ceinture de banquise, comme habituellement d'ailleurs, sauf en 1932 et 1933, s'appuyait sur la côte Est, mais cette année les glaces étaient particulièrement abondantes et serrées; elle interdisait totalement à tous les navires de s'en approcher.

Nous avons appareillé pour Angmagssalik, le 22 août; la traversée des glaces, tant pour sortir de la baie de Rosenvinge que pour franchir la ceinture extérieure, fut très dure; elle prouva la solidité du bateau, l'endurance de l'équipage et l'habileté du commandant.

Une fois en mer libre, nous longeâmes le bord extérieur de la banquise pendant les deux seuls vraiment beaux jours de toute notre campagne; toutefois, en arrivant dans les parages de notre destination, au moment de pénétrer dans le pack lâche bordant la côte, nous eûmes à subir quelques heures de coup de vent avec neige. Les icebergs étaient très nombreux et

de grandes dimensions; l'entrée même du fiord où se trouve la station d'Angmagssalik était bouchée par 5 milles de glaces très serrées que nous avons mis 12 heures à franchir. Le poste d'amarrage était occupé par le *Gertrud-Rask*, qui nous avait précédé de 24 heures, mais son capitaine nous indiqua un mouillage extérieur suffisamment à proximité de la station. Contrairement à ce qui s'y passe à cette époque de l'année, des glaces en assez grande abondance parcouraient le fiord et même un iceberg d'une vingtaine de mètres de hauteur frôla le *Pourquoi-Pas ?* sans l'endommager.

L'important matériel de la mission française a été débarqué par notre équipage, porté sur une colline de 20m d'altitude et installé à la confortable maison prêtée à nos compatriotes par le gouvernement danois. Environ 500 Esquimaux, comprenant femmes et enfants, venus momentanément des agglomérations voisines pour l'arrivée du *Gertrud-Rask*, ont été accueillis à bord; par de menus cadeaux de jouets, verroterie, pipes et tabac, de bonnes relations, dont profitera la mission ethnographique, ont été amorcées.

Le 29 août, un T. S. F. intercepté par notre poste nous a appris, alors que le *Gertrud-Rask* était déjà parti, qu'un avion américain, conduit par M. Light, accompagné d'un jeune officier de la N. R. des États-Unis, se rendait à Augmagssalik. Nous l'avons bientôt aperçu, hésitant dans la direction à prendre; par T. S. F. nous lui avons donné le relèvement nécessaire tout en faisant une colonne de fumée pour attirer son attention; il a pu ainsi reconnaître cette localité difficile à trouver et amerrir. Nous avons immédiatement conduit l'hydravion au meilleur mouillage, puis logé et entretenu les aviateurs à bord pendant leur séjour.

Un savant hollandais, M. Van Zuylen, membre de l'*Année Polaire*, qui a poursuivi pendant deux années consécutives des observations de magnétisme terrestre à Angmagssalik, nous a demandé de le ramener en France avec son matériel scientifique; nous avons, bien entendu, accédé à son désir.

Malgré les conseils transmis par l'avion américain parti le matin, nous appareillâmes le 31 août; non seulement les glaces abondantes descendant au Nord étaient alarmantes, mais l'obligation d'être continuellement sous les feux vidait nos soutes à charbon d'une façon inquiétante. La traversée fut très dure; un coup de vent d'E-N-E, estimé force 12 par la station de Jan Mayen, nous obligea à tenir les caps pendant trois jours, un autre du N-N-E lui succéda et, en forçant la voilure, nous finîmes par arriver à Reykjavik avec 5 tonnes de charbon en soutes.

Après ravitaillement dans ce port, nous avons appareillé pour Brest le

9 septembre. Le 10, le baromètre commença à baisser et tomba à 732 pour remonter ensuite rapidement à 770; du 10 au 12, nous avons essuyé une véritable tempête du N-E avec mer démontée nous obligeant à mettre en fuite; le vent de même force, mais avec une mer moins dangereuse, sauta brusquement au S-W, puis tourna au Sud; après deux jours de lutte sous voiles, nous avons pu nous réfugier dans le Trangisvaagfiord (Feroë) où nous avons réparé les quelques avaries occasionnées dans le gréement et la voilure par cette traversée mouvementée.

Pendant notre court séjour dans cette localité, deux grands hydravions de la *Military Air Force* britannique sont venus amerrir et nous ont demandé des renseignements sur Angmagssalik, où ils devaient éventuellement se rendre.

Le reste de la traversée de retour fut également mouvementé. Un coup de vent du Sud nous obligea à nous raccrocher à Stornoway, un autre à Milford Haven, et un dernier nous accueillit peu de temps avant notre arrivée à Brest dans la matinée du 26 septembre.

Au cours de cette campagne très pénible, non seulement nous avons atteint les deux buts principaux qui nous étaient assignés, récupération du matériel de l'*Année Polaire* et installation de la nouvelle mission française, mais des recherches biologiques, géologiques, ethnographiques ainsi que d'intéressantes observations météorologiques et glaciologiques ont été effectuées. En dehors de quelques renseignements concernant la navigation dans cette région plus de 200 sondages au Marti (fréquemment vérifié) ont été placés et portés; 120 remplissent des blancs de la carte et une dizaine complètent ou rectifient l'atterrissage des Feroë par l'Ouest.

Pendant cette croisière, et j'avoue en éprouver une certaine fierté, jamais le prestige de notre marine nationale et de la Science française à laquelle elle contribue si largement, n'a été perdu de vue. La façon dont s'est comporté le *Pourquoi-Pas?*, son état-major et son équipage a été appréciée par des nations usagères des régions parcourues. Nous avons, de plus, pu rendre des services, dont quelques-uns importants, à des navigateurs allemands, anglais, danois, islandais, italiens, américains et hollandais.

M. **Ch. Maurain** fait hommage à l'Académie d'un volume contenant les *Comptes rendus de l'Assemblée de Lisbonne* (1933), de l'*Association de Magnétisme et Électricité terrestres*, de l'*Union géodésique et géophysique internationale*, publiés par les soins de Ch. Maurain et D. La Cour.

ÉLECTIONS.

MM. **H. Le Chatelier** et **G. Urbain** sont élus à nouveau membres de la *Commission de contrôle de la circulation monétaire*.

CORRESPONDANCE.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées*. Note de M. **Paul Lévy**.

1. Soit une suite de variables enchaînées u_n ($n = 1, 2, \ldots$). Désignons par $\mathcal{E}_n\{x\}$ et $\mathcal{P}_n\{E\}$ la valeur probable de x et la probabilité de E, évaluées lorsque l'on connaît les n premières variables u_ν; les notations $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ indiqueront des évaluations *a priori*. Nous poserons

$$\mu_n^2 = \mathcal{E}_{n-1}\{u_n^2\}, \qquad \sigma_n^2 = \sum_1^n \mu_\nu^2, \qquad S_n = \sum_1^n u_\nu.$$

Nous aurons à utiliser les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{C})$ $$\mathcal{E}_{n-1}\{u_n\} = 0,$$

$(\mathcal{C}')$ $$|u_n| \leqq U \qquad (\text{U indépendant de } n),$$

$(\mathcal{C}'_1)$ $$\begin{cases} |u_n| \leqq U_n(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}), \\ \mathcal{P}\left\{ \lim_{n \to \infty} \left[\sum_1^n \mathcal{P}_{\nu-1}\{|U_\nu| > \varepsilon\sigma\} \right]_{\sigma = \sigma_n} = 0 \right\} = 1 \qquad (\varepsilon \text{ arbitrairement petit}), \end{cases}$$

$(\mathcal{C}'_2)$ les $|u_n|$ vérifient la condition imposée ci-dessus aux U_n.

$(\mathcal{C}'_2)$ est donc moins restrictif que $(\mathcal{C}'_1)$. Si $(\mathcal{C}'_2)$ n'est pas vérifié, il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles on ne peut pas négliger la probabilité que le plus grand des $|u_\nu|$ ($\nu \leqq n$) dépasse $\varepsilon\sigma_n$; du moins cette circonstance a une probabilité positive. $(\mathcal{C}'_2)$ est naturellement un peu moins restrictif que la condition obtenue en se plaçant au point de vue de la loi forte des grands nombres, et écrivant que $|u_n|/\sigma_n$ tend presque sûrement

vers zéro ; il faudrait écrire

$$\mathcal{P}\left\{\sum_{1}^{\infty}\mathcal{P}_{n-1}\{|u_n|>\varepsilon\sigma_n\}<\infty\right\}=1.$$

Théorème I. — *En négligeant des éventualités infiniment peu probables, si* ($\mathcal{C}$) *est vérifié, la convergence de la série* $\Sigma\mu_n^2$ *entraîne celle de* Σu_n. *Si* ($\mathcal{C}$) *et* ($\mathcal{C}'_1$) *sont vérifiés, la divergence de la première série entraîne celle de la seconde.*

2. Appelons *chaîne* toute suite de valeurs possibles pour les u_n. Imaginons une règle absolument quelconque, déterminant à chaque instant en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ si les expériences ayant donné ces valeurs doivent être arrêtées ou continuées (exemple : jeu arrêté par la ruine du joueur). Chaque chaîne sera ainsi arrêtée après un certain nombre N (fini ou infini) de termes; l'ensemble des chaînes ainsi arrêtées constitue une *section;* à chaque section correspondent trois variables aléatoires importantes à considérer, N, $\sigma_N^2=t$ et $S_N=X$. Nous appellerons section à t constant celle obtenue en arrêtant chaque chaîne dès que σ_n^2 atteint ou dépasse t. Compte tenu de ($\mathcal{C}'_2$), on peut alors avec une erreur négligeable sur X supposer que σ_N^2 a exactement la valeur donnée t.

Dans les énoncés qui suivent, il est entendu que la probabilité de la divergence de $\Sigma\mu_n^2$ est positive, et, si elle n'est pas égale à l'unité, qu'il s'agit de probabilités *a posteriori* évaluées dans l'hypothèse de la divergence [on peut éviter d'évaluer des probabilités dépendant d'une infinité de termes en faisant seulement l'hypothèse $|S_n|>S$ et faisant croître indéfiniment d'abord n, ensuite S; ou bien en faisant l'hypothèse $|S_n|>\varphi(\sigma_n)$, $\varphi(\sigma)$ augmentant indéfiniment avec σ mais étant infiniment petit par rapport à σ]. Enfin il s'agit de l'étude asymptotique de sections dépendant d'un paramètre λ, et telles que t soit, sauf dans des cas de probabilité nulle, fini et indéfiniment croissant avec λ.

Théorème II. — *Pour les sections à t constant, si* ($\mathcal{C}$) *et* ($\mathcal{C}'_1$) *sont vérifiés, et en cas de divergence de* $\Sigma\mu_n^2$, *on a*

$$\lim\mathcal{P}\{X<\xi\sqrt{t}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

En remplaçant, dans les théorèmes I et II, ($\mathcal{C}'_1$) par la condition plus restrictive ($\mathcal{C}'$), on a un énoncé moins complet que j'ai déjà communiqué le 23 mai 1934 à la Société mathématique de France. On ne peut pas espérer mieux que de remplacer ($\mathcal{C}'_1$) par la condition moins restrictive ($\mathcal{C}'_2$),

sans laquelle il est impossible de trouver pour S_n une loi asymptotique indépendante d'hypothèses plus précises sur la probabilité des grandes valeurs de u_n. Supposons donc $(\mathcal{C}'_2)$ vérifié, et désignons par u'_n une variable égale à u_n si $|u_n| \leq \varepsilon\sigma_n$ et nulle dans le cas contraire ; le théorème II s'applique alors toujours à la suite des variables $u'_n - \mathcal{E}_{n-1}\{u'_n\}$. Il s'appliquera aussi à Σu_n moyennant une nouvelle hypothèse : les valeurs de $|u_n|$ dépassant $\varepsilon\sigma_n$, par hypothèse très peu probables, peuvent de plus être négligées pour le calcul de $\Sigma\mathcal{E}_{n-1}\{u_n\}$ et de σ_n^2, avec des erreurs très petites respectivement par rapport à σ_n et σ_n^2, et $\Sigma(\mathcal{E}_{n-1}\{u'_\nu\})^2$ est en outre très petit par rapport à σ_n^2.

Pour des sections à t variable, on a le résultat suivant, où $\mathcal{P}'$ désigne une probabilité calculée dans l'hypothèse que, quand σ_n^2 atteint la valeur t_1, on ait $s_n < x_1\sqrt{t_1}$.

Théorème III. — *Si* $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}'_1)$ *sont vérifiés, dans les cas de divergence de* $\Sigma\mu_n^2$, *et si la section considérée est telle que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\lambda \to \infty} (\mathcal{P} - \mathcal{P}')\{t_1(1-\varepsilon) < t < t_2(1+\varepsilon)\} = 0$$

[t_1 et $t_2 \geq t_1$ infinis avec λ, x_1 constant quelconque], *la conclusion du théorème II subsiste*. En d'autres termes, X est encore le produit de $\sqrt{t}$ par la variable gaussienne x indépendante de t ; mais ici t est une variable aléatoire.

Application. — Supposons la loi dont dépend u_n symétrique, celle dont dépend $|u_n|$ dépendant seulement de $|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n-1}|$, et telle que $(\mathcal{C}'_1)$ soit vérifié. Alors, la section à n constant étant du type précédent, la conclusion du théorème III s'applique, dans les cas de divergence de $\Sigma\mu_n^2$, à l'étude de S_n pour une valeur donnée et très grande de n.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur le théorème de M. Picard*. Note de M. **M. Ghermanesco**, transmise par M. Émile Borel.

1. Considérons une fonction entière d'ordre fini $f(z)$, admettant le développement taylorien

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Le théorème de M. Picard admet l'existence d'une seule valeur exceptionnelle finie a au plus pour $f(z)$, tandis qu'un autre, dû à M. Borel, exige que, dans ces conditions, $f(z)$ soit d'ordre fini. Enfin un théorème

de M. Calugareano ([1]) donne la valeur exceptionnelle comme racine d'une certaine équation algébrique.

La proposition suivante complète les résultats cités plus haut :

Théorème. — *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction entière d'ordre fini $f(z)$ admette une valeur exceptionnelle a sont les suivantes :*

a. Entre un nombre quelconque $p+1$ de coefficients consécutifs du développement taylorien de la fonction $f(z)$, il doit y avoir une relation récurrente linéaire de la forme

$$(A)\qquad \lambda_0 c_n + \lambda_1 c_{n-1} + \ldots + \lambda_{p-1} c_{n-p+1} = (n+1) c_{n+1} \qquad (n \geq p);$$

b. Les $p+1$ premiers coefficients du même développement doivent satisfaire aux relations

$$(B)\qquad \lambda_0 c_n + \lambda_1 c_{n-1} + \ldots + \lambda_n c_0 = (n+1) c_{n+1} + a\lambda_n \qquad (n = 0, 1, \ldots, p-1),$$

a, λ_i étant des constantes. Dans ces conditions, p sera l'ordre et a la valeur exceptionnelle de $f(z)$.

La démonstration s'appuie sur la relation

$$f(z) - a = e^{P(z)},$$

$P(z)$ étant un polynome du $p^{\text{ième}}$ degré en z, tel que

$$P'(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_{p-1} z^{p-1}.$$

On démontre aussi qu'il ne peut y avoir deux relations de la forme (A) entre les coefficients d'une fonction entière, vu que, dans ce cas, ces coefficients vérifieraient aussi une relation de la forme

$$\mu_0 c_n + \mu_1 c_{n-1} + \ldots + \mu_{p-1} c_{n-p+1} = 0,$$

μ_i étant des constantes, relation qui caractérise les fractions rationnelles. L'élimination des constantes λ_i entre les relations (B) nous conduit au théorème de M. Calugareano.

Étant donné l'unicité des coefficients λ_i, les relations (B) donnent immédiatement une démonstration élémentaire du théorème de M. Picard car, en les supposant vérifiées pour deux valeurs a_1, a_2 de a, on en déduit $a_1 \equiv a_2$.

2. Considérons un système de m fonctions entières d'ordres finis $f_i(z)$

([1]) *Bull. des Sc. math.*, 54, 1930, p. 17-32.

($i = 1, 2, \ldots, m$), linéairement distinctes. La combinaison

$$F(z) = \mu_0 + \mu_1 f_1(z) + \mu_2 f_2(z) + \ldots + \mu_m f_m(z)$$

est dite *exceptionnelle*, d'après M. P. Montel [1], lorsque $F(z)$ est dépourvue de zéros. En désignant par c_{in} le coefficient de z^n dans $f_i(z)$, les combinaisons des coefficients des mêmes puissances de z,

$$\mu_1 c_{1n} + \mu_2 c_{2n} + \ldots + \mu_m c_{mn},$$

devront satisfaire, d'après le théorème précédent, aux relations (A) et (B), a devra y être remplacé par μ_0. Nous dirons que les coefficients c_{in} forment, dans ces conditions, *une combinaison exceptionnelle*. Avec cela, le théorème précédent nous donne :

Théorème. — *Étant donné un système de m fonctions entières d'ordres finis linéairement indépendantes, elles forment une combinaison exceptionnelle lorsque les coefficients des mêmes puissances de z en forment une.*

De ce théorème on déduit ceux qui correspondent aux algébroïdes entières et aux fonctions méromorphes, dont le premier comprend un théorème de M. Varopoulos [2].

3. On peut enfin rattacher quelques considérations géométriques au théorème précédent. L'élimination des constantes λ_i entre les relations (B) écrites pour les combinaisons des coefficients c_{in}, nous conduit à une relation algébrique entre les paramètres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ [3]. En considérant ces paramètres comme étant les coordonnées d'un point de l'espace à m dimensions, cette relation définit une surface G, que nous dirons *exceptionnelle*, tandis que les points $M_k(\mu_i)$ correspondant aux combinaisons exceptionnelles seront les *points exceptionnels* de la surface. Ces considérations, jointes à un théorème de M. Montel (*loc. cit.*), nous conduisent au résultat suivant :

Théorème. — *A tout système de m fonctions entières d'ordres finis, linéairement distinctes, correspond une surface exceptionnelle dans l'espace à m dimensions, sur laquelle se trouvent* $2m - 1$ *points exceptionnels au plus.*

---

(1) *Acta mathematica*, 49, 1926, p. 115 et suiv.

(2) *Mathematica*, 5, 1931, p. 7-9.

(3) On peut supposer μ_0 égal à une constante, ce qui revient à diviser tous les μ^i par la même quantité, sans ôter le caractère de combinaison exceptionnelle à $F(x)$.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Quelques nouvelles remarques sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible.* Note (1) de M. **Dimitri Riabouchinsky**, transmise par M. Henri Villat.

M. Émile Jouguet (2) a développé d'une manière systématique l'analogie qui existe entre les théories des mouvements par tranches parallèles de l'eau dans un canal et d'un gaz dans un tuyau. Il appelle *gaz hydraulique* le gaz fictif dont l'équation de compressibilité est telle que la pression est proportionnelle au carré de la densité et démontre que la perte de charge produite par l'onde de choc dans le gaz hydraulique et par le ressaut dans un liquide sont identiques.

L'analogie entre les ondes soulevées par un navire et celles qui accompagnent un projectile a aussi été signalée, mais, comme le remarque M. J. Ackeret (3), cette dernière analogie est assez superficielle (nicht sehr weitgehend).

J'ai étendu (4) la théorie de l'analogie hydraulique aux mouvements bidimensionnels d'un gaz, ayant en vue de développer une méthode de recherches expérimentales basée sur cette analogie. Je me propose d'exposer ici une nouvelle généralisation de cette théorie.

Prenons les équations du mouvement, rapportées à des axes mobiles, sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2\zeta v' - \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = -2\zeta u' - \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

$$Q = H - \frac{1}{2}(q'^2 - \bar{q}^2) = \int \frac{dp}{\rho} - U + \text{const.}$$

Pour un gaz, et sur la surface libre d'un liquide, on a

$$Q_{\text{gaz}} = \frac{C^2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right], \qquad Q_{\text{eau}} = C^2\left(\frac{h}{h_1} - 1\right).$$

h_1, ρ_1 et C sont respectivement la profondeur de l'eau, la densité du gaz et la célérité des ondes en un point où les vitesses relative et d'entraînement

(1) Séance du 17 septembre 1934.

(2) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8e série, 3, 1920, p. 7.

(3) *Gasdynamik* (*Handbuch der Physik*, 7, 1927, p. 337).

(4) *Comptes rendus*, 195, 1932, p. 998.

sont égales. L'analogie considérée s'étend donc aux mouvements non permanents et rotationnels d'un gaz.

Calculons les coefficients de résistance K_x pour un cylindre de hauteur l placé dans un tunnel aérodynamique (*fig.* 1), et pour un cylindre de même

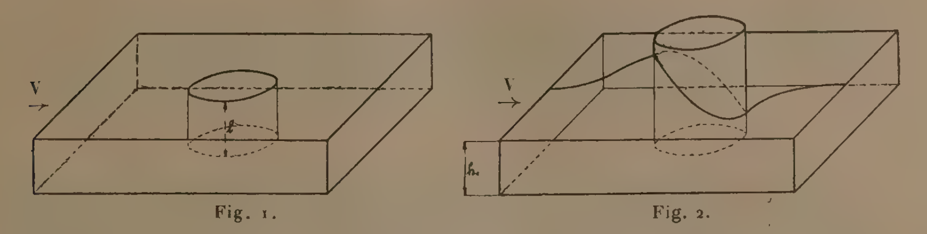


Fig. 1. Fig. 2.

diamètre D qui se déplace dans un bassin de profondeur $h_1 = l$ (*fig.* 2) :

$$\frac{R}{\rho_1 V^2 l D} = \frac{\int p \cos \widehat{n x}\, ds}{\rho_1 V^2 D} = \frac{C^2}{V^2} \int \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma} \cos \widehat{n x} \frac{ds}{D},$$

$$\frac{R}{\rho V^2 h_1 D} = \frac{\iint p \cos \widehat{n x}\, ds\, dh}{\rho V^2 h_1 D} = \frac{C^2}{V^2} \int \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_1}\right)^{2} \cos \widehat{n x} \frac{ds}{D}.$$

Pour le gaz hydraulique et pour l'eau, ces expressions se confondent pour un cylindre de section quelconque. Il en est de même pour les coefficients de moment.

Il résulte de cette théorie qu'un bassin approprié à de pareilles recherches (pas profond mais large, muni éventuellement, le long de ses parois, de dispositifs pour amortir les ondes) pourrait rendre dans l'étude de la résistance des fluides compressibles des services comparables à ceux rendus par les bassins dans les recherches sur les carènes et par les souffleries à l'aérodynamique des voilures. L'étude expérimentale des mouvements non permanents, par exemple de ceux que déterminerait une aile battante, serait difficilement réalisable dans l'air à des vitesses supersoniques; au contraire, dans le bassin de l'analogie hydraulique une pareille étude ne présenterait aucune difficulté. Il resterait, sans doute encore, pour obtenir une coïncidence quantitative, à calculer la correction de passage du gaz hydraulique à l'air.

Citons un exemple de l'application de cette théorie. Comme on le sait, les qualités portantes des voilures diminuent aux très grandes vitesses. J'ai pensé qu'on pourrait y remédier, dans une certaine mesure, en adjoignant à la voilure des plans, parallèles au mouvement, pour déterminer une

réflexion de l'onde supérieure de surpression vers le bas et de l'onde inférieure de dépression vers le haut. L'interférence des ondes pourrait aussi être utilisée pour diminuer la résistance des corps à l'avancement.

Pour soumettre ce raisonnement à une vérification expérimentale, j'ai étudié, dans une cuve à mouvements d'eau adaptée à ces recherches, l'aile épaisse RAF [1] de L. J. Briggs et H. L. Dryden. Le plan réfléchissant était placé à une certaine distance au-dessus du bord d'attaque de la voilure. Les valeurs respectives des coefficients sans dimension K_y et K_x et celles de la finesse, pour $V:C = 1,75$ et $i = 14°$, sont données ci-dessous. Voilure sans *réflecteur* : 0,213; 0,115; 1,85. Voilure avec réflecteur : 0, 262; 0,098; 2,61. Cette expérience préliminaire est donc en bon accord avec la prévision théorique.

AÉRODYNAMIQUE. — *Les hélices aériennes; photographie des trajectoires; étude des tourbillons secondaires*. Note [2] de M. **Jacques Valensi**, transmise par M. Henri Villat.

Nous avons donné [3] avec le tracé d'un faisceau de trajectoires marginales une vérification de ce tracé consistant dans la reconstitution des lignes d'émission correspondantes par la jonction des points d'égale phase du faisceau. On peut vérifier la forme des trajectoires par leur photographie directe obtenue de la manière suivante : le faisceau de fumée étant éclairé vivement par un faisceau lumineux laminaire contenant le tube de fumée et l'axe de l'hélice, on exécute un instantané (durée approximative une révolution de l'hélice) l'appareil étant placé à 90° du faisceau lumineux. Dans l'exemple ci-contre, les trajectoires ainsi photographiées (en projection) présentent une analogie frappante avec les trajectoires dont nous avons donné le tracé [3].

Décrivons d'autre part brièvement les apparences qui nous ont permis de conclure à l'existence dans le champ aval de l'hélice de tourbillons hélicoïdaux secondaires entre le tourbillon marginal et le tourbillon du moyeu (tourbillons principaux). Dans toutes les coupures des lignes d'émission, entre la région marginale et la région du moyeu (lignes d'émis-

---

(1) *C. R. du IIIe Congrès international de Mécanique appliquée*, Stockholm, 1, 1930, p. 421.

(2) Séance du 17 septembre 1934.

(3) *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 2137.

sion secondaires) on aperçoit des panaches de fumées revêtant la forme de petits tubes se développant à partir des coupures sur une faible longueur (en comparaison des tubes analogues de la région marginale) dans le sens de rotation de l'hélice le long des lignes hélicoïdales lieu des centres des



coupures des lignes d'émission. En donnant au tube de fumées des positions convenables, on fait parcourir aux panaches de fumées ces lignes hélicoïdales, et l'on constate qu'elles aboutissent au bord de fuite des pales.

Il est permis, par conséquent, de considérer la couche de discontinuité qui s'échappe du bord de fuite des pales comme formée de filets tourbillonnaires hélicoïdaux gardant toujours leur individualité (tout au moins dans le champ de notre observation, trois diamètres à l'aval de l'hélice). La forme de cette couche de discontinuité serait par conséquent *stable* ; il

ne semble pas en particulier qu'il y ait tendance à un enroulement, et si cet enroulement existe en dépit des apparences, il est extrêmement partiel étant donné la subsistance des coupures et panaches le long des lignes d'émission secondaires. Cependant nous avons mis en évidence par l'étude des trajectoires un phénomène d'enroulement que nous avons schématisé ici (*loc. cit.*), pour les lignes d'émission marginales; il convient de noter que les particules d'air qui s'enroulent autour du tourbillon marginal n'ont pas touché les pales de l'hélice en traversant le plan de rotation. Un phénomène analogue se produit sur les lignes d'émission secondaires; cette fois les particules de ces lignes d'émission qui n'ont pas touché les pales de l'hélice s'enroulent en partie autour du tourbillon marginal ou du tourbillon du moyeu (enroulement principal) et en partie autour des tourbillons secondaires correspondants (enroulement secondaire). Pour les lignes d'émission secondaires de la région neutre, cependant, l'enroulement a presque exclusivement lieu autour des tourbillons secondaires. D'ailleurs l'enroulement croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'hélice.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Adsorption par le charbon de mélanges binaires en solution aqueuse.* Note [1] de M. **Raymond Amiot**, présentée par M. Delépine.

Comme suite à nos recherches antérieures sur l'adsorption par le charbon des phénols et des polyalcools en solution aqueuse [2], nous avons étudié l'adsorption exercée par le même corps sur des mélanges binaires de ces constituants en solution aqueuse.

A 40^{cm^3} de la solution, on ajoutait une masse de charbon égale à 200^{mg}. Après agitation de quelques heures et centrifugation, on comparait, au moyen d'un réfractomètre interférentiel, l'indice de la solution ainsi obtenue à celui de la solution initiale. L'appareil avait été étalonné au préalable pour chaque substance, et l'on s'était assuré que, dans l'une quelconque des solutions utilisées, une augmentation de concentration de l'un des constituants produisait une augmentation d'indice sensiblement indépendante de la concentration de l'autre constituant. Les mesures

---

(1) Séance du 30 juillet 1934.

(2) R. Amiot, *Comptes rendus*, 197, 1933, p. 325.

faisaient connaître la diminution globale d'indice produite par l'adsorption; pour en déduire la masse de chaque substance fixée, il était nécessaire de doser l'une des substances dans la solution en équilibre.

Nos expériences ont porté sur des mélanges où le phénol était associé à diverses substances non entraînables par la vapeur d'eau : saccharose, mannite, érythrite, glycérine. Lorsque l'équilibre d'adsorption était réalisé, on éliminait le phénol par entraînement à la vapeur d'eau et l'on dosait le constituant restant en solution par une mesure d'indice à l'interféromètre.

Dans les tableaux suivants relatifs à quelques expériences sur des mélanges de phénol et de saccharose, on a désigné par C et C' les concentrations initiales, par x et x' les concentrations d'équilibre du phénol et du saccharose en milligrammes pour 100$^{cm^3}$ de solution; par y et y' les masses en milligrammes de phénol et de saccharose fixés par gramme de charbon.

Tableau I.

	C = 0.		C = 50.			
C'.	x'.	y'.	x.	y.	x'.	y'.
0	0	0	1,7	96,6	0	0
25	2,1	45,9	1,7	96,6	11,1	27,8
50	11,6	76,9	2,0	96,1	28,6	42,9
100	47,5	105,1	3,1	93,8	72,6	54,8
200	137,9	124,3	2,9	94,3	165,3	69,5
400	328,9	142,3	2,6	94,8	361,6	76,8

Tableau II.

			$\frac{C}{C+C'}=\frac{1}{2}$.		$\frac{C}{C+C'}=\frac{1}{3}$.		$\frac{C}{C+C'}=\frac{1}{6}$.	
C.	x.	y.	x'.	y'.	x'.	y'.	x'.	y'.
12,5...	0,6	23,9	2,9	19,2	2,4	45,1	24,8	75,5
25,0...	1,3	47,4	8,7	32,7	20,8	58,5	81,0	88,1
50,0...	2,9	94,3	28,6	42,9	72,6	54,8	210,4	79,2
100,0...	17,2	165,6	93,5	13,1	188,7	22,6	475,2	49,6

Des résultats rassemblés dans les tableaux précédents, et d'autres dont le détail sera publié ailleurs, se dégagent les conclusions suivantes :

1° Dans une solution mixte contenant du phénol associé à l'un quelconque A des constituants examinés, l'adsorption du phénol n'est pas influencée d'une manière sensible par la présence du second constituant. Par contre, la présence du phénol a pour effet de réduire dans des proportions notables l'adsorption du constituant A (Tableau I).

2° Pour une concentration initiale déterminée du phénol, l'adsorption du constituant A par le charbon croît à mesure que croît sa concentration dans le mélange (Tableau I). Si l'on représente graphiquement la concentration y' du constituant A dans le charbon en fonction de sa concentration x' dans la solution, les courbes $y' = f(x')$, qui ont l'allure des isothermes d'adsorption, s'étagent dans l'ordre décroissant des concentrations initiales de phénol.

3° Pour des solutions dans lesquelles la proportion initiale du phénol dans le mélange dissous $C/C + C'$ demeure constante (Tableau II), la concentration totale en corps dissous allant en croissant,

a. la concentration y du phénol dans le charbon croît en fonction de sa concentration d'équilibre x dans la solution suivant les lois ordinaires de l'adsorption et sans être influencée d'une manière sensible par la concentration initiale du constituant A;

b. la concentration y' du constituant A dans le charbon croît d'abord avec la concentration d'équilibre x' de ce constituant dans la solution, passe par un maximum pour une certaine valeur x'_M et décroît ensuite pour tendre vers zéro.

La concentration x'_M relative au maximum varie en sens inverse de la proportion initiale $C/C + C'$ de phénol dans le mélange dissous.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la conservation à l'état hygrométrique 1/2 des bobines de résistance étalon Otto Wolff à fil laqué, exposées aux variations dues aux inégalités de l'humidité atmosphérique.* Note [1] de M. **Miroslav Romanowski**, présentée par M. Paul Janet.

A la suite d'observations qualitativement concordantes faites indépendamment au Bureau of Standards (Rosa et Babcock), au National Physical Laboratory (Smith), et à la Physikalisch-technische Reichsanstalt (Lindeck), concernant l'influence de l'humidité atmosphérique sur les bobines de résistance laquées exposées à l'air, deux moyens ont été adoptés pour soustraire les étalons à ces causes de variation : aux États-Unis et en Angleterre, l'habitude est de fermer hermétiquement le boîtier des bobines étalons.

En Allemagne on préfère laisser les boîtiers ouverts et conserver les

[1] Séance du 24 septembre 1934.

étalons dans une enceinte où règne un état hygrométrique donné choisi arbitrairement égal à 50 pour 100.

Le Bureau international a adopté ce procédé de conservation des étalons à boîtier ouvert et le recommande aux autres institutions.

La constance de l'état hygrométrique est assurée par l'emploi de solutions aqueuses d'acide sulfurique de concentration appropriée ou, ce qui revient au même, de densité fixée.

A condition que la température dans la solution soit bien égale à celle de l'air de l'enceinte, et que cette solution présente une large surface de contact avec l'air, on obtient en peu de temps un état hygrométrique très sensiblement indépendant de la température; pour d'autres raisons, on a intérêt à ne pas s'écarter beaucoup de 20° (température de définition des bobines de résistance).

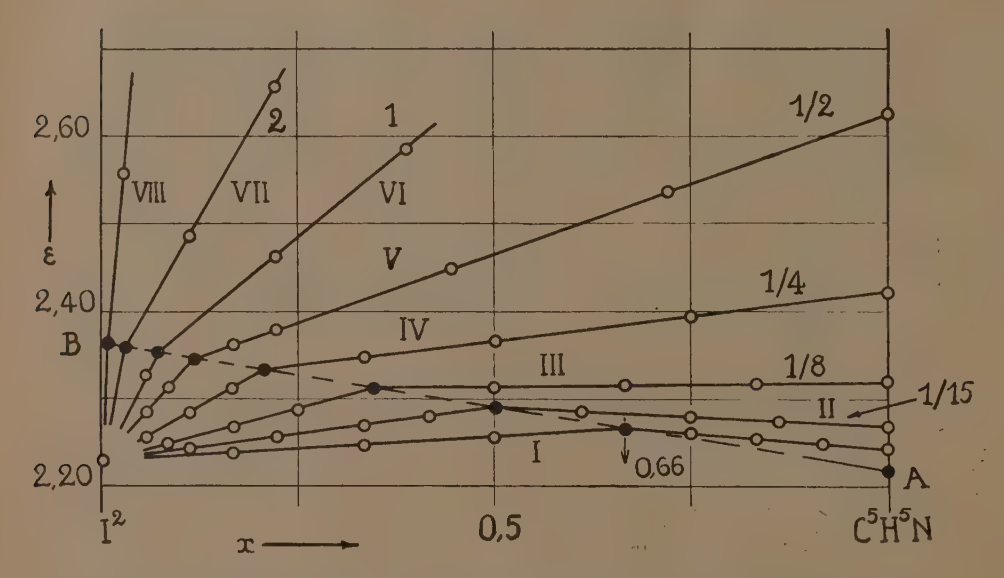
Pour réaliser l'état hygrométrique 1/2, la Physikalisch-technische Reichsanstalt emploie des solutions aqueuses d'acide sulfurique ayant à 20° la densité $1,33_6$. Il revient pratiquement au même d'utiliser des solutions dosées par voie chimique et présentant la concentration en masse de 43,2 pour 100 SO^4H^2.

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Existence d'un type fréquent de complexe iodé en solution organique*. Note de MM. **André Chrétien** et **Pierre Laurent**, présentée par M. Georges Urbain.

La coloration brune des solutions d'iode, observée avec de nombreux solvants organiques, est attribuée généralement à la formation de combinaisons d'addition dissociables par élévation de température avec retour au violet, coloration considérée comme normale. Nous avons appliqué la méthode des variations dites continues à la recherche de ces combinaisons par mesure du pouvoir inducteur spécifique (p. i. s.). Une solution violette d'iode $[(1-x)\,cm^3]$ est additionnée d'une solution d'un corps qui la fait brunir ($x\,cm^3$); le mélange obtenu présente un p. i. s. ε. On porte x en abscisse et ε en ordonnée.

Iode et pyridine. — Si l'on ajoute une solution de pyridine à une solution d'iode, dans le sulfure de carbone, le p. i. s. varie de façon discontinue. Le grafique est formé de deux droites dont le point de rencontre correspond toujours à la solution renfermant 1 mol-g d'iode pour 2 mol-g de pyridine.

Nous avons fait huit séries de mesures; l'une en solutions équimoléculaires (1/30e mol-g/l, courbe I); pour les autres séries, la concentration de l'iode est 1/30e mol-g/l, celle de la pyridine est respectivement 1/15, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2 et 12,4 mol-g/l (pyridine pure) (courbes II à VIII). L'abscisse de la cassure a pour expression $x = 2/p + 2$ (p, rapport de la concentration moléculaire de la pyridine à celle de l'iode); en solutions équimoléculaires, $x = 0,66$.



Un diagramme analogue est obtenu en utilisant comme solvant le cyclohexane.

Ces faits s'accordent en faveur de l'existence en solution d'un composé formé par l'union d'une mol-g d'iode avec 2 mol-g de pyridine. On peut admettre que ce composé n'est pas dissocié. Il se fait la réaction non équilibrée

$$I^2 + 2C^5H^5N \rightarrow [I^2(C^5H^5N)^2],$$

La propriété mesurée est additive par rapport à l'iode, à la pyridine et au composé complexe; on voit que les points anguleux qui correspondent à la concentration maximum du complexe, donc à une solution du complexe pur, s'alignent de façon remarquable (droite AB).

Des résultats analogues au précédent ont été obtenus en substituant à la

pyridine les bases suivantes : quinoléine, aniline, paratoluidine, diphénylamine, tribenzylamine. Dans chaque cas, nous avons mis en évidence un composé renfermant 1 mol-g d'iode pour 2 mol-g de base. L'existence en solution dans le tétrachlorure de carbone, ou dans le cyclohexane, des complexes suivants est établie :

$$[I^2(C^9H^7N)^2]; \quad [I^2(C^6H^5NH^2)^2]; \quad \left[I^2\left(C^6H^4\begin{smallmatrix}CH^3\\NH^2\end{smallmatrix}\right)^2\right];$$

$$\left[I^2[(C^6H^5)^2NH]^2\right]; \quad \left[I^2[(C^6H^5CH^2)^3N]^2\right].$$

On fait intervenir dans la bibliographie divers composés halogénés, obtenus généralement d'une manière indirecte, de la pyridine et de l'aniline. Les formules indiquées paraissent incertaines, et les résultats sont assez incohérents. Notons seulement les combinaisons suivantes qui sont les plus sûres : $[I, C^5H^5N]NO^3$; $[I, (C^5H^5N)^2]NO^3$; $[I, (C^5H^5N)^2ClO^4$. Les complexes iodoazotés du type $[I^2, X^2]$ (X, base organique) dont nous avons caractérisé l'existence en solution ne sauraient être confondus avec ceux-là ([1]).

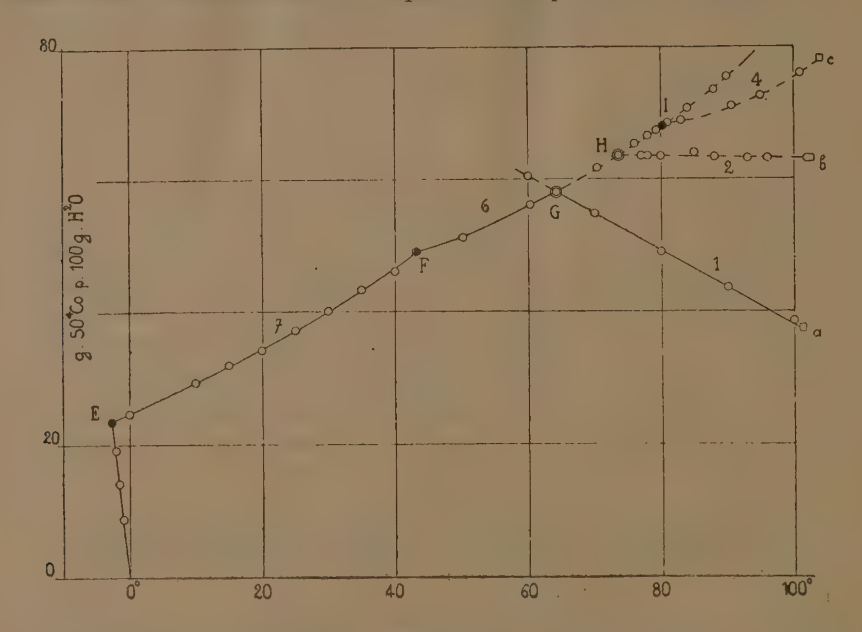
CHIMIE MINÉRALE. — *Sur les hydrates du sulfate cobalteux.* Note de M. **Raymond Rohmer**, présentée par M. Georges Urbain.

J'ai étudié par solubilité le système $SO^4Co - H^2O$ dans tout l'intervalle de température accessible sous la pression atmosphérique. Cette étude était justifiée par les résultats incohérents éparpillés dans la bibliographie. En exceptant les composés $SO^4Co, 7H^2O$ et $SO^4Co, 6H^2O$ et, peut-être, SO^4Co, H^2O, il n'était pas possible d'affirmer l'existence d'autres hydrates définis. Certains auteurs concluaient même à l'absence de tout autre hydrate.

Le diagramme qui résume mon travail comporte six branches de courbe mettant en évidence six phases solides : glace et cinq hydrates. L'existence des composés $SO^4Co, 4H^2O$; $SO^4Co, 2H^2O$ et SO^4Co, H^2O est donc établie avec certitude.

([1]) Pendant nos recherches, M. Chatelet (*Comptes rendus*, **196**, 1933, p. 1421) a obtenu la combinaison $I^2, (C^5H^5N)^2$ par évaporation de solutions d'iode dans la pyridine; la durée de vie des cristaux est très courte, de deux à cinq minutes.

Les équilibres relatifs au tétrahydrate et au dihydrate sont toujours métastables. Le monohydrate est la phase solide stable au-dessus de 64°, 2; sa solubilité diminue linéairement quand la température augmente.



Il intervient cinq équilibres en présence de deux solides. Voici les caractéristiques de ces équilibres :

Solides coexistants.	Point.	Température.	SO^4Co (gr. p. 100g d'eau)
Glace — $SO^4Co, 7H^2O$...	E	— 2°,7	23,5
$SO^4Co, 7H^2O$ — $SO^4Co, 6H^2O$...	F	43,3	49,0
$SO^4Co, 6H^2O$ — SO^4Co, H^2O...	G	64,2	58,0
$SO^4Co, 6H^2O$ — $SO^4Co, 2H^2O$...	H	72,9	63,5
$SO^4Co, 6H^2O$ — $SO^4Co, 4H^2O$...	I	80,4	68,1

Les équilibres métastables faisant intervenir l'hexahydrate, le tétrahydrate et le dihydrate sont peu tenaces. Vers les températures élevées, il est de plus en plus difficile d'atteindre la saturation avant un commencement de transformation du solide en hydrate inférieur. La durée d'existence du tétrahydrate comme phase solide unique est particulièrement courte : quelques heures seulement. Il est possible, cependant, de déter-

miner avec une précision satisfaisante sa solubilité, qui est atteinte très rapidement. D'ailleurs, le passage réversible du tétrahydrate à l'hexahydrate en présence de solution est manifesté par un bon palier de température, facilement accessible, au moins au refroidissement (point I).

La formation du monohydrate est toujours précédée, au-dessus de 80°,4, de la formation du tétrahydrate, puis de celle du dihydrate, si la concentration initiale de la solution est suffisante. Le monohydrate apparaît toujours très rapidement, mais, même aux températures élevées, les équilibres qui lui correspondent ne s'établissent que très lentement. Cet hydrate subsiste facilement comme solide métastable, et se conserve plus ou moins longtemps, malgré agitation, jusqu'à 20° et même au delà. Un commencement de transformation en hexahydrate ou en heptahydrate se produit, mais elle se fait avec une lenteur extrême. Aucun effet thermique n'est appréciable.

Sous pression constante, la température d'ébullition de la solution saturée diminue lentement, puis se fixe pendant un quart d'heure environ, diminue à nouveau, reste fixe pendant un temps variant de 1 heure et demie à 2 heures et demie; elle diminue encore et s'établit à un troisième palier. Cette variation curieuse de la température d'ébullition correspond à la suite de transformations :

$$SO^4Co, 6H^2O \rightarrow SO^4Co, 4H^2O \rightarrow SO^4Co, 2H^2O \rightarrow SO^4Co, H^2O.$$

Les trois paliers de température obtenus successivement sont relatifs à l'ébullition de la solution saturée respectivement de tétrahydrate, de dihydrate et de monohydrate. Sous la pression atmosphérique normale, les températures de ces paliers sont : 103°,5, 102°,3, 101°,2. La température normale d'ébullition de la solution saturée de l'hexahydrate est 104°,5.

Les phénomènes rencontrés rappellent ceux qui se manifestent dans le système $SO^4Ni - H^2O$, mais dans le cas du sulfate de nickel [1] les équilibres métastables sont plus nombreux, et remarquablement tenaces.

---

(1) André Chrétien et Raymond Rohmer, *Comptes rendus*, **198**, 1934, p. 92.

ACTINOMÉTRIE. — *Influence de la transparence de l'atmosphère sur les résultats fournis par la comparaison de deux pyrhéliomètres.* Note de MM. **C.-E. Brazier**, **I. Mašek** et **R. Guilhen**, présentée par M. Ch. Maurain.

La comparaison des valeurs de l'intensité de la radiation solaire déterminées simultanément au moyen du pyrhéliomètre Abbot n° 40 et du pyrhéliomètre Marvin n° 7, appartenant à l'Institut de Physique du Globe de l'Université de Paris, met en évidence des discordances qui ne peuvent s'expliquer, toutes vérifications faites, par des erreurs de mesure ou des imperfections de l'étalonnage.

En vue de déterminer la cause à laquelle elles doivent être attribuées, nous avons effectué à l'aide de ces deux instruments 16 séries de mesures simultanées réparties sur l'été et l'automne 1932 et sur l'hiver 1932-1933. Si, pour chacune de ces séries, on forme le rapport moyen m/a des résultats obtenus avec le pyrhéliomètre Marvin m et le pyrhéliomètre Abbot a, on trouve que ce rapport varie d'une série à l'autre suivant les conditions atmosphériques et qu'il augmente quand on passe de la saison chaude à la saison froide. Sa valeur oscille, en été, autour de 0,96; en hiver, autour de 0,99.

Toutes les hypothèses invoquées pour rendre compte de ces faits s'étant montrées inacceptables, ce caractère saisonnier, joint à l'influence des conditions météorologiques nous a conduits à supposer que les variations du rapport m/a devaient être en relation avec celles de la transparence de l'atmosphère, m/a augmente en effet quand le ciel devient plus pur et l'on sait d'autre part que, par beau temps, sous le climat de Paris, la transparence atmosphérique est plus grande en hiver qu'en été [1]. Nous avons donc adopté, comme mesure de cette transparence, le coefficient apparent de transparence, p, de la formule de Bouguer [2], calculé à partir des

---

(1) C.-E. Brazier, *Études actinométriques* (*Ann. de l'Institut de Physique du Globe de l'Université de Paris*, 9, 1931, p. 112-136).

(2) $I = I_0 p^\varepsilon$, dans laquelle I = intensité de la radiation solaire mesurée, I_0 = intensité de la radiation solaire à la limite supérieure de l'atmosphère, calculée en admettant pour la constante solaire la valeur 1,94, p = coefficient apparent de transparence, ε = épaisseur atmosphérique traversée par les rayons solaires, l'épaisseur atmosphérique au zénith étant prise comme unité.

résultats obtenus au moyen du pyrhéliomètre Abbot, et comparé les valeurs de ce coefficient aux valeurs correspondantes de m/a. Nous avons trouvé que, dans les limites entre lesquelles nous avons opéré, soit entre $p = 0,60$ et $p = 0,81$, les seize valeurs de m/a fournies par nos comparaisons se répartissent autour d'une droite $m/a = 0,822 + 0,213\,p$ dont elles ne s'écartent pas de quantités supérieures aux erreurs de mesure.

Cette relation montre que les échelles des deux instruments que nous avons comparés, concordantes pour les valeurs de p comprises entre 0,83 et 0,84, s'écartent de 5 pour 100 lorsque p tombe à la valeur de 0,60. Ce résultat s'explique par l'action de la diffusion atmosphérique et les propriétés géométriques des tubes à diaphragmes dont sont munis les appareils pyrhéliométriques.

On sait en effet que l'atmosphère exerce sur la radiation solaire une action diffusante qui se traduit par un affaiblissement du rayonnement solaire et une brillance plus ou moins grande du ciel, qui atteint son maximum dans le voisinage immédiat du Soleil. Or tout pyrhéliomètre comporte un ensemble de diaphragmes destinés à délimiter le faisceau de radiations admis sur l'organe récepteur. Ce dispositif, s'il remplissait parfaitement son rôle, devrait éliminer d'une manière absolue le rayonnement diffusé par le ciel. Mais, en fait, cette élimination n'est rigoureusement réalisée que pour les rayons diffusés situés en dehors d'un cône dont l'ouverture β est donnée par la formule $\tang \beta = (b + c)/l$, b et c étant les diamètres des diaphragmes extrêmes et l la distance qui les sépare. Il en résulte qu'un pyrhéliomètre, au lieu de mesurer uniquement l'intensité de la radiation solaire, mesure en réalité la somme de deux quantités. L'une, I, est l'intensité de la radiation solaire directe qui devrait seule influencer le récepteur : elle a la même valeur pour tous les intruments observés au même instant en un même lieu. L'autre, i, correspond à l'intensité de la radiation diffusée qui parvient au récepteur : pour un même appareil, son rapport à I change avec les conditions atmosphériques et pour deux pyrhéliomètres observés simultanément au même endroit; elle n'a la même valeur que si leurs tubes à diaphragmes et la disposition de leurs organes récepteurs par rapport à ces derniers sont géométriquement semblables. Cette dernière condition n'étant pas réalisée par les pyrhéliomètres Abbot et Marvin, dont les ouvertures sont respectivement $\beta_a = 20°,6$ et $\beta_m = 16°$, il s'ensuit que le rapport m/a des indications du second à celles du premier doit être en fonction de la diffusion atmosphérique. Comme, d'autre part, le coefficient apparent de transparence varie en sens inverse de l'intensité

de la diffusion, il est facile de prévoir que, si i n'est pas négligeable devant I eu égard à la précision des procédés de mesure, le rapport m/a doit diminuer en même temps que p, prévision parfaitement d'accord avec les résultats que nous avons obtenus.

Nous n'insisterons pas pour l'instant sur toutes les conséquences qui découlent des considérations précédentes au point de vue de la mise en œuvre des observations pyrhéliométriques. Nous ferons simplement remarquer que les propriétés géométriques des tubes à diaphragmes imposent à la précision des résultats que fournissent ces observations une limite, variable avec l'instrument employé et les circonstances atmosphériques. Les nombres rapportés ci-dessus montrent que l'ordre de grandeur de cette limite est loin d'être négligeable et qu'il est indispensable d'en tenir compte si l'on ne veut pas se leurrer sur l'approximation que comportent les mesures de l'intensité de la radiation solaire.

CHIMIOTHÉRAPIE. — *Action de la cystéine sur la toxicité de l'antimoine.* Note de M. **Léon Launoy**, présentée par M. Delépine.

D'après Ehrlich [1] l'action parasiticide de composés chimiques de la forme R.AS = O, où R représente un radical aliphatique ou aromatique, résulterait d'une réaction chimique entre l'arsénoxyde AsO<C₆H₃(NH²)>OH et un constituant chimiquement défini du protoplasma. Pour Voegtlin et ses collaborateurs, ce constituant protoplasmique contiendrait du soufre, celui-ci étant sous la forme du radical sulfhydrile [2]. Cette dernière hypothèse trouve un appui dans les recherches déjà anciennes de Hefter et dans celles plus récentes de Hopkins. Le constituant cellulaire contenant du soufre sous forme de radical sulfhydrile est offert par le glutathion, tripeptide existant dans l'organisme et composé de cystéine, d'acide glutamique et de glycine comme l'ont vu Hopkins [3] et Kendall [4]. Les expériences de Voegtlin (*loc. cit.*) ont montré qu'en effet le glutathion se comportait comme un antitoxique de l'arsénoxyde. D'autres substances, la cystéine, le thioglycolate de sodium, l'acide thiolactique, la glycil-

---

(1) *Zeit. angew. Ch.*, 22, 1910, p. 2.

(2) *Public Health Reports.*, 38, 1923, p. 1882; *Journ. Ph. and Exp. Therap.*, 25, 1925, p. 297.

(3) *Journ. Biol. Chem.*, 84, 1929, p. 269.

(4) *Journ. Biol. Chem.*, 84, 1929, p. 657.

cystéine, l'acide thiosalicylique, sont également antagonistes de l'arsénoxyde, mais inférieurs au glutathion. Dans le glutathion, le radical SH serait donc un chémo-récepteur, dans le sens d'Ehrlich. Rappelons que le glutathion représente un important facteur d'où dépendent les phénomènes d'oxydo-réduction qui se passent dans l'intimité du protoplasma (1).

Ayant à notre disposition une certaine quantité de cystéine, nous avons recherché si ce composé possédait une action antagoniste contre la toxicité de l'antimoine, notre antimoine étant sous forme d'antimoine-III-thiomalate de lithium.

Dans ces recherches, nous avons d'abord déterminé la toxicité de la cystéine pour la souris de 20^g, l'injection étant faite par voie veineuse et la quantité de produit à injecter pour 20^g étant dissoute dans 1^{cm^3}.

Le Tableau I montre qu'une souris du poids donné supporte 30^{mg} de cystéine.

Tableau I.

Date de l'essai.	Dose en milligr.	Nombre de souris.	Survies.	Coefficients de survie.
28 août 1934	10	6	6	1
»	20	3	3	1
»	30	4	2	0,5
»	35	1	0	0
»	40	1	0	0
»	70	2	0	0

D'autre part, nous avons étudié la toxicité du SbIII thiomalate de lithium

$$\left[\begin{array}{l} LiO.CO.CH - S \\ \quad\quad\quad\quad | \\ LiO.CO.CH^2 \end{array}\right]^3 Sb.9H^2O.$$

Nos résultats sont consignés dans le Tableau II ci-dessous.

Tableau II.

Date de l'essai.	Dose de Sb en 1/10e de milligramme.	Nombre de souris.	Survies.	Coefficients de survie.
21 août	4	10	10	1
21 »	5	10	9	0,9
21 »	6	10	7	0,7
24 »	7	10	4	0,4
4-6 sept	6,5	20	15	0,75
7-11 »	7,4-7,5	24	5	0,21
11 »	8,5	10	0	0
11-12 »	9,2	20	0	0

(1) *Bioch. Journ.*, 15, 1921, p. 286; *Journ. Biol. Chem.*, 54, 1922, p. 527.

Ce tableau montre que la dose d'antimoine supportée en injection intraveineuse, sous forme de thiomalate, par une souris de 20^g, varie entre 0^g,0005 et 0^g,00075. La dose permettant une survie d'environ 50 pour 100 étant comprise entre 0^g,00065 et 0^g,0007.

Avec le tableau ci-dessous, il est facile de tracer la courbe de survie, elle se présente comme une courbe en S, type courbe de Shackell.

Que devient la toxicité de l'antimoine thiomalate quand on injecte simultanément une dose sûrement mortelle d'antimoine et une dose de cystéine non toxique? Le Tableau III répond à cette question.

Tableau III.

Date de l'essai.	Sb en 1/10e milligramme.	Cystéine en milligrammes.	Nombre de souris.	Survies.	Coefficients de survie.
4 sept. . .	6,5	10	10	10	1
6 » . .	6,5	5	10	9	0,9
11 » . .	7,5	5	15	15	1
11 » . .	8,5	5	15	13	0,86
11-12 » . .	9,2	5	19	17	0,89
13 » . .	11	5	15	4	0,26
12 » . .	14	5	15	1	0,066

La comparaison des Tableaux II et III prouve d'une façon nette l'action désintoxicante de la cystéine pour l'antimoine.

Conclusion. — Étant donné la résistance propre de la souris à l'antimoine, on peut dire, d'après les tableaux ci-dessus, qu'un milligramme de cystéine est capable de s'opposer à l'action toxique d'un dixième de milligramme d'antimoine environ, ce dernier étant ici sous forme de thiomalate, et les deux produits étant injectés *simultanément*.

La séance est levée à 15^{h}55^m.

E. P.